MAA HL

Test on Mathematical Induction

by Christos Nikolaidis

Date: 28 January 2020

without GDC

Marks: /40

Name of student: _____

1. [Maximum mark: 6]

Prove by mathematical induction that $3^{2n} + 7$ is divisible by 8 for any $n \in Z^+$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Turn over

2. [Maximum mark: 9]

(a) Prove by mathematical induction that [7]

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2 \qquad \text{for any } n \in Z^+.$$

(b) Confirm that the statement is true for $n = 3$. [2]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

3. [Maximum mark: 7]

Prove by mathematical induction that

$$3^n > n^2 + 2n \qquad \text{for any integer } n \geq 2.$$

$$3^n > n^2 + 2n \qquad 3$$

4. [Maximum mark: 8]

A sequence is defined recursively as follows

$$u_1 = 5$$

$$u_{n+1} = 2u_n + 5$$

(a) Write down the first four terms of the sequence. [2]

(b) Prove by mathematical induction that

$$u_n = 5 \cdot 2^n - 5 \qquad \text{for any } n = 1,2,3,\ldots. \qquad [6]$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$$u_1 = 5$$

5. [Maximum mark: 10]

(a) Prove by mathematical induction that

$$n! \times [2 \times 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times (4n-2)] = (2n)! \qquad \text{for any } n \in Z^+.$$ [8]

(b) Express $(2 \times 6 \times 10 \times 14 \times \cdots \times 78)$ in the form $\dfrac{a!}{b!}$. [2]

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....